پردازش کوانتومی اطلاعات

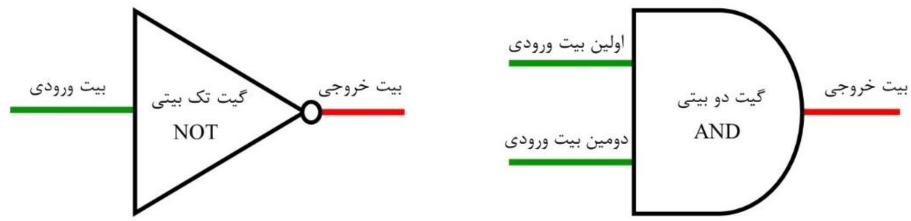
نرگس ایمانی

دانشکده فیزیک، دانشگاه اصفهان

• پست الکترونیکی: imani94@sci.ui.ac.ir

در مقاله آموزشی شماره پیش فصلنامه کیوتک، به طور خلاصه به معرفی کیوبیت پرداخته و برخی تفاوت‌های آن با بیت کلاسیکی را برشمردیم. بعلاوه برای درک بیشتر مفاهیم، حالت برهمنهی سیستم‌های دو کیوبیتی و سه کیوبیتی را بدست آورده و دیدیم که به کمک روش نمودار درختی به سادگی می‌توان حالت‌های متمایز یک سیستم کوانتومی را مشخص نمود. در انتها به معرفی کیودیت‌ها به عنوان سیستم‌های کوانتومی d حالته‌ای که نقش واحد پردازش و ذخیره سازی اطلاعات را ایفا می‌کنند، پرداختیم. همچنین برای درک بیشتر، حالت برهمنهی یک سیستم دو کیوتریتی را بدست آوردیم.

گفتیم اولین قدم برای حل هر مساله‌ای، نمایش «داده‌های مساله» است. برای حل مسائل توسط سیستم‌های محاسباتی، باید بتوانیم داده‌ها را به زبان قابل فهم سیستم ترجمه کنیم. حال که می دانیم چگونه داده‌ها را باید به زبان قابل فهم سیستم ترجمه کنیم، در گام بعدی باید بدانیم چگونه می‌توان روی این داده‌ها پردازش انجام داد تا خروجی مطلوب ما توسط دستگاه محاسباتی تولید شود. به طور کلی، هر وسیله محاسبه(کامپیوتر) وسیله‌ای است که علاوه بر نمایش اطلاعات، قابلیت اعمال دنباله‌ای از «توابع ساده» بر روی آن‌ها را دارد. در کامپیوترهای کلاسیکی که از منطق باینری پیروی می‌کنند، فرآیند پردازش اطلاعات به این صورت است که پس از دریافت بیت‌های ورودی، پردازنده توسط توابع ساده‌ای که گیت نامیده می‌شوند، همچونNAND ، AND ، OR وNOT ، ... بیت‌های ورودی را دستکاری می‌کند و خروجی مطلوب را تولید می‌کند. تعداد بیت‌های ورودی به یک گیت، چند بیتی بودن آن گیت را مشخص می‌کند. برای مثال گیت‌های AND و OR گیت‌های دو بیتی و گیت NOT یک گیت تک بیتی است .



اولین بیت ورودی	دومین بیت ورودی	بیت خروجی
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

جدول ارزشی گیت دو بیتی AND

بیت ورودی	بیت خروجی
0	1
1	0

جدول ارزشی گیت تک بیتی NOT

Figure 1:نمونه‌ای از یک گیت تک بیتی و یک گیت دو بیتی کلاسیکی به همراه جدول ارزشی آن‌ها. جدول ارزشی یک گیت تمامی ورودی‌های ممکن و خروجی‌های ممکن آن گیت را مشخص می‌کند.

می‌توان هر تابع پیچیده‌ای را توسط مجموعه‌ای از این گیت‌ها بر روی بیت‌های ورودی اعمال کرد که این مجموعه را اصطلاحا «مجموعه جهان شمول از گیت‌ها (Universal set of gates)» می‌نامند. زیرا این مجموعه کامل است و می‌توان هر تابع پیچیده را جوری بر طبق آن‌ها تجزیه کرد که با اعمال منظم یک سری از گیت‌های این مجموعه بر داده‌های ورودی، خروجی تولید کرد که معادل خروجی تولید شده ناشی از اعمال تابع پیچیده بر روی داده‌های ورودی باشد. به عبارت دیگر، به مجموعه حداقل گیت‌هایی که توسط آن‌ها بتوان هر گیت دلخواه دیگری را ساخت، مجموعه جهان شمول می‌گویند. برای مثال مجموعه {AND, OR, NOT} و گیت NAND جهان شمول بوده و می‌توان توسط آن‌ها هر گیت و تابع پیچیده دیگری را ساخت، اما مجموعه {XOR, NOT} جهان شمول نیست. چون یک محاسبه به معنی اعمال یک تابع بر روی داده‌های ورودی است، بنابراین هر وسیله‌ای که قابلیت اعمال یک مجموعه جهان شمول از گیت‌ها را داشته باشد، قابلیت انجام «هر محاسبه‌ای» را دارد.

الگوریتم مجموعه‌ای متناهی از دستورالعمل‌ها است، که به ترتیب خاصی اجرا می‌شوند و مسئله‌ای را حل می‌کنند. به عبارت دیگر یک الگوریتم، روشی گام به گام برای حل مسئله است. از نقطه نظر گیت‌ها، الگوریتم عبارت معادل برای اعمال یک تابع پیچیده برحسب گیت‌ها برروی ورودی است.

Figure 2: ساده‌ترین مکانیزم یک الگوریتم

مطالبی که تاکنون در رابطه با گیت‌ها و الگوریتم‌ها گفتیم، هیچکدام مختص فیزیک کلاسیک نیست. در دنیای کلاسیک، گیت‌ها توابع تحول زمانی ساده‌ای هستند. یعنی پس از دریافت بیت‌های ورودی، با اعمال مجموعه گیت‌های مطلوب، بیت‌های ورودی در طی زمان تحول می‌یابند و به بیت های خروجی مطلوب تبدیل می‌شوند. مشابه همین وضعیت را در محاسبات کوانتومی نیز داریم. گفتیم که نمایش اطلاعات در محاسبات کوانتومی توسط کیوبیت‌ها صورت می‌گیرد. این کیوبیت‌ها در حقیقت ویژه حالتِ هامیلتونی سیستمی هستند که به عنوان کیوبیت در نظر گرفته شده است. در دنیای کوانتومی نیز باید با در نظر گرفتن کیوبیت‌های ورودی، عملگر تحول زمانی کوانتومی مطلوب را بر کیوبیت‌ها اعمال کرد. در این وضعیت کیوبیت‌های ورودی در طی زمان تحول می‌یابند و خروجی مطلوب را تولید می‌کنند.

تحولات زمانی یک سیستم کوانتومی توسط معادله شرودینگر داده می‌شود. شکل برداری معادله شرودینگر به صورت

$$\hat{\mathrm{H}}\left|\psi(t)\right\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi(t)\right\rangle$$

است. در این رابطه $\hat{\mathrm{H}}$ هامیلتونی و $\left|\psi(t)\right\rangle$ حالت سیستم کوانتومی در زمان t است. در حالت کلی، می‌توان فرض کرد که با معرفی یک عملگر زمانی به صورت $\hat{\mathrm{U}}(t)$ و اعمال آن بر روی حالت اولیه سیستم $\left|\psi(0)\right\rangle$، حالت نهایی $\left|\psi(t)\right\rangle = \hat{\mathrm{U}}(t)\left|\psi(0)\right\rangle$ را بدست آورد.

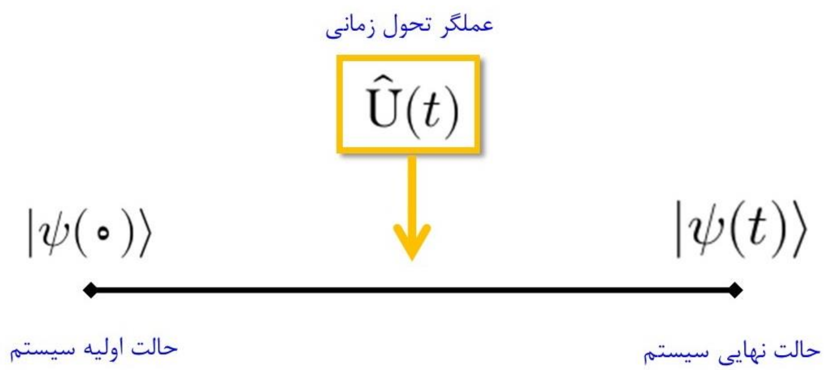


Figure 3: تحول زمانی یک حالت کوانتومی. حالت اولیه سیستم کوانتومی در زمان $t=0$ توسط $|\psi(0)\rangle$ نشان داده شده است. برای آنکه حالت سیستم در زمان t بدست آید.

اکنون با جایگذاری $|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\psi(0)\rangle$ در معادله شرودینگر داریم:

$$\hat{H}|\psi(t)\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle$$

$$\hat{H}\left(\hat{U}|\psi(0)\rangle\right) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left(\hat{U}|\psi(0)\rangle\right)$$

$$\left[\hat{H}\,\hat{U}\right]\left(|\psi(0)\rangle\right) = \left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}\right]\left(|\psi(0)\rangle\right)$$

پس در حالت کلی و با توجه به اینکه $|\psi(0)\rangle$ در دو طرف تساوی وجود دارد، رابطه زیر برقرار است:

$$\hat{H}\,\hat{U}(t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}(t)$$

اگر هامیلتونی وابسته به زمان باشد و با عملگر تحول زمانی جابه‌جا شود، $\left[\hat{U}(t), \hat{H}(t)\right] = 0$، و همچنین هامیلتونی در زمان t با هامیلتونی در تمامی زمان‌های t' جابه‌جا شود، $\left[\hat{H}(t'), \hat{H}(t)\right] = 0$، می‌توان از رابطه اخیر به صورت زیر انتگرال گیری کرد:

$$\frac{d\,\hat{U}(t')}{\hat{U}(t')} = -\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t')dt'$$

$$\int_0^t \frac{d\,\hat{U}(t')}{\hat{U}(t')} = -\frac{i}{\hbar}\int_0^t \hat{H}(t')dt'$$

$$\ln\left(\hat{U}(t')\right)\Big|_0^t = -\frac{i}{\hbar}\int_0^t \hat{H}(t')dt'$$

$$\ln\left(\hat{U}(t)\right) - \ln\left(\hat{U}(0)\right) = \ln\left(\hat{U}(t)\right) = -\frac{i}{\hbar}\int_0^t \hat{H}(t')dt'$$

در عبارت آخر از این موضوع که $\hat{\mathrm{U}}(0)=1$ و $\ln(1)=0$ است، استفاده شد. در نهایت می‌توان $\hat{\mathrm{U}}(t)$ را بر حسب هامیلتونی سیستم به صورت زیر بدست آورد:

$$\hat{\mathrm{U}}(t)=\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_0^t \hat{\mathrm{H}}(t')dt'\right)$$

اگر هامیلتونی مستقل از زمان باشد، عملگر تحول زمانی شکل ساده $\hat{\mathrm{U}}(t)=\exp\left(-\frac{i\hat{\mathrm{H}}t}{\hbar}\right)$ را به خود می‌گیرد.

در حالت کلی، برای بدست آوردن عملگر تحول زمانی داریم:

$$\hat{\mathrm{U}}\left(t,t_0\right)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{i}{\hbar}\right)^n\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t_1}dt_2\cdots\int_{t_0}^{t_{n-1}}dt_n\ \hat{\mathrm{H}}\left(t_1\right)\hat{\mathrm{H}}\left(t_2\right)\cdots\hat{\mathrm{H}}\left(t_n\right)$$

این عملگر، تحول زمانی سامانه از زمان t_0 تا t را مشخص می‌کند. گاهی این عبارت را سری دایسون می‌نامند. برای توضیحات بیشتر، خواننده علاقه‌مند می‌تواند به کتاب «مکانیک کوانتومی مدرن» تالیف ساکورایی مراجعه کند. شکل خلاصه‌تر این عملگر را می‌توان با کمک عملگر ترتیب زمانی(time ordering)، T ، به صورت زیر نوشت:

$$\hat{\mathrm{U}}\left(t,t_0\right)=\mathrm{T}\exp\left[i\int_{t_0}^{t}dt'\ \hat{\mathrm{H}}\left(t'\right)\right]$$

با توجه به اینکه هامیلتونی سیستم یک عملگر هرمیتی است، عملگر تحول زمانی یکانی می‌باشد. اگر حالت اولیه سیستم کوانتومی یک حالت فیزیکی باشد، عملگر تحول زمانی یکانی باعث می‌شود که حالت نهایی نیز یک حالت فیزیکی باشد.

به طور کلی، هدف از هر محاسبه‌ای توسط کامپیوترهای کوانتومی بدست آوردن حالت نهایی سیستم $|\psi(t)\rangle$ است. دلیل استفاده از سیستم‌های کوانتومی به عنوان محاسبه‌گر، محدودیت کامپیوترهای کلاسیکی است. این محدودیت‌ها شامل محدودیت‌های فنی، تعداد عملیات محاسبه و حجم حافظه مورد نیاز برای مسائل پیچیده می‌باشد. از نظر فنی و تکنولوژی ساخت، کامپیوترهای کلاسیکی به زودی به حدی می‌رسند که اگر مدارهای پردازنده‌ها را کوچکتر کنیم، اثرات کوانتومی در مدار قابل مشاهده خواهد بود. بروز اثرات کوانتومی در مدارهای کلاسیکی سبب از بین رفتن توانایی پردازش می‌شود. از سوی دیگر، شبیه سازی مستقیم سیستم‌های کوانتومی در کامپیوترهای کلاسیکی به دلیل حجم زیاد حافظه مورد نیاز برای ذخیره حالت سیستم کوانتومی، بسیار دشوار است. دلیل این مشکل تعداد پارامترهای توصیف کننده یک حالت کوانتومی است. هرچه اندازه سیستم کوانتومی رشد کند، تعداد پارامترهای مورد نیاز برای توصیف حالت سیستم کوانتومی به صورت نمایی رشد می‌کند. بعلاوه

شبیه سازی تحول زمانی سیستم نیز به پارامترهایی نیاز دارد که تعداد این پارامترها هم با رشد اندازه سیستم کوانتومی، به طور نمایی رشد می‌کند.

ریچارد فاینمن پیشنهاد داد که می‌توان با به کارگیری یک سیستم کوانتومی قابل کنترل، سیستم‌های کوانتومی دیگر را شبیه سازی کرد. این ایده جالب مساله ذخیره سازی حالت کوانتومی و همچنین افزایش تعداد پارامترها در شبیه سازی تحول زمانی سیستم کوانتومی مطلوب را حل می‌کند. حال به دو طریق می‌توان توسط یک سیستم کوانتومی، سیستم کوانتومی دیگری را شبیه سازی کرد. روش اول این است که تحول زمانی سیستم کوانتومی قابل کنترلمان را که آن را شبیه ساز می‌نامیم، به صورتی دستکاری کنیم که تا حد ممکن شبیه به تحول زمانی سیستم کوانتومی شود که در حال شبیه سازی آن هستیم. در حقیقت در این روش شبیه ساز ما تحول زمانی سیستم کوانتومی دیگر را تقلید می‌کند. چنین وسیله‌ای را شبیه ساز کوانتومی آنالوگ می‌نامند. این روش شبیه سازی تنها در صورتیکه سیستم و شبیه ساز به اندازه کافی مشابه هم باشند، امکان پذیر است. به همین دلیل یک شبیه ساز کوانتومی آنالوگ صرفا می‌تواند دسته محدودی از سیستم‌های کوانتومی را شبیه سازی کند. درستی شبیه سازی هم بستگی به این دارد که تا چه میزان شبیه ساز می‌تواند دینامیک سیستم در حال شبیه سازی را تولید کند .

به طور خلاصه اگر فرض کنیم که شبیه ساز کوانتومی آنالوگ ما دارای هامیلتونی $\hat{\mathrm{H}}_1$ است و ما میخواهیم سیستم کوانتومی دیگری با هامیلتونی $\hat{\mathrm{H}}_2$ را توسط آن شبیه سازی کنیم، اولا این دو هامیلتونی باید تا حد زیادی شبیه به هم باشند و در ثانی باید با کمک پارامترهای قابل کنترلی که در هامیلتونی شبیه ساز وجود دارد، $\hat{\mathrm{H}}_1$ به صورتی تغییر یابد که بیشترین شباهت را به $\hat{\mathrm{H}}_2$ داشته باشد. در نهایت می‌توان با اندازه گیری کمیت مطلوب از شبیه ساز، فرض کرد که مقدار بدست آمده برابر با مقدار کمیت مد نظر در سیستم کوانتومی دوم است.

روش دیگر، استفاده از حالت سیستم کوانتومی به عنوان کیوبیت و تجزیه تحول یکانی سیستم بر حسب گیت‌های پایه کوانتومی و اعمال به ترتیب آن‌ها بر حالت اولیه سیستم است تا حالت نهایی $|\psi(t)\rangle$ بدست آید. برای اینکار از کامپیوتر کوانتومی مبتنی بر مدار استفاده کرده و برای مدل فیزیکی یک الگوریتم کوانتومی در نظر گرفته می‌شود. این شبیه ساز کوانتومی مبتنی بر مدار را شبیه ساز کوانتومی دیجیتال می‌نامند. این روش دقیقا مشابه کاری است که در کامپیوترهای کلاسیکی مبتنی بر مدار یا همان کامپیوترهای دیجیتالی صورت می‌گیرد. به لحاظ نظری این کامپیوتر کوانتومی می‌تواند هر هامیلتونی موضعی غیربی‌نهایت را به طور موثر شبیه سازی کند. مهمترین مزیت چنین شبیه ساز کوانتومی دیجیتالی، همین جهان شمول بودن آن است. این نوع شبیه سازها نسبت به شبیه سازهای آنالوگ دقیق‌تر و جامع‌تر هستند، با این حال چالش‌های بسیاری در راه ساخت این نوع شبیه سازها وجود دارد که در شماره‌های بعدی فصلنامه به آن‌ها خواهیم پرداخت. همین چالش‌ها سبب شده که هر دو نوع

شبیه سازی یعنی آنالوگ و دیجیتال اهمیت داشته باشد و توجه محققین را به خود جلب کند. در ادامه این مقاله آموزشی برای آشنایی بیشتر با شبیه سازهای دیجیتالی، به معرفی گیت‌های پایه می‌پردازیم.

مشابه گیت‌های کلاسیکی، می‌توانیم گیت‌های کوانتومی هم داشته باشیم. گیت‌های کوانتومی عملگرهای یکانی هستند و یک ویژگی بسیار مهم این نوع گیت‌ها برگشت پذیر بودن عملیات است. یعنی اگر گیت کوانتومی را بر حالت اولیه سیستم کوانتومی اعمال کنیم، می‌توانیم حالت نهایی را بدست آوریم. حال اگر از ابتدا حالت نهایی را داشته باشیم، می‌توانیم با اعمال گیت کوانتومی وارون روی حالت نهایی، حالت اولیه سیستم را بدست آوریم. چنین عملی را نمی‌توان در کلاسیک انجام داد. برگشت پذیر بودن گیت به ازای تمامی گیت‌های کلاسیکی میسر نیست. برای مثال با دیدن خروجی گیت NOT کلاسیکی می‌توان پی برد که ورودی چه بوده است. اگر 1 خروجی باشد، پس 0 ورودی بوده و اگر 0 خروجی باشد، پس 1 ورودی بوده است. اما چنین تحلیلی را نمی‌توان برای خروجی‌های گیت AND به کار برد؛ زیرا خروجی این گیت به ازای سه ورودی 00،01 و 10 برابر با 0 و به ازای ورودی 11 برابر با 1 است. بنابراین اگر خروجی گیت 0 بدست آید، نمی‌توان ورودی را مشخص کرد. در نتیجه این گیت کلاسیکی یک عملیات برگشت ناپذیر را بر روی بیت‌های ورودی اعمال می‌کند.

گیت‌های کوانتومی نیز مشابه گیت‌های کلاسیکی می‌توانند یک یا چند کیوبیتی باشند. اگر عملگر یکانی دلخواهی را به عنوان یک گیت کوانتومی در نظر بگیریم، تعداد کیوبیت‌های ورودی به این گیت کوانتومی، چندکیوبیتی بودن گیت را مشخص می‌کند. مثالی از گیت‌های چند کیوبیتی را در شکل4 می‌بینید. این شکل همچنین یک مدار کوانتومی نوعی را نشان می‌دهد. در حالت کلی، مدار کوانتومی مشخص می‌کند که چگونه محاسبات کوانتومی چند کیوبیتی را می‌توان به دنباله‌ای از گیت‌های کوانتومی تجزیه کرد. یک مدار n کیوبیتی شامل n خط افقی است که هر کدام از این خطوط افقی نشان دهنده یک کیوبیت است. طبق قرارداد، کیوبیتی که در بالاترین خط است، اولین کیوبیت و کیوبیتی که در پایین ترین سطح است، آخرین کیوبیت است. در مدار کوانتومی، زمان از چپ به راست در جریان است. پس گیت‌های سمت چپ زودتر از گیت‌های سمت راست اجرا می‌شوند .

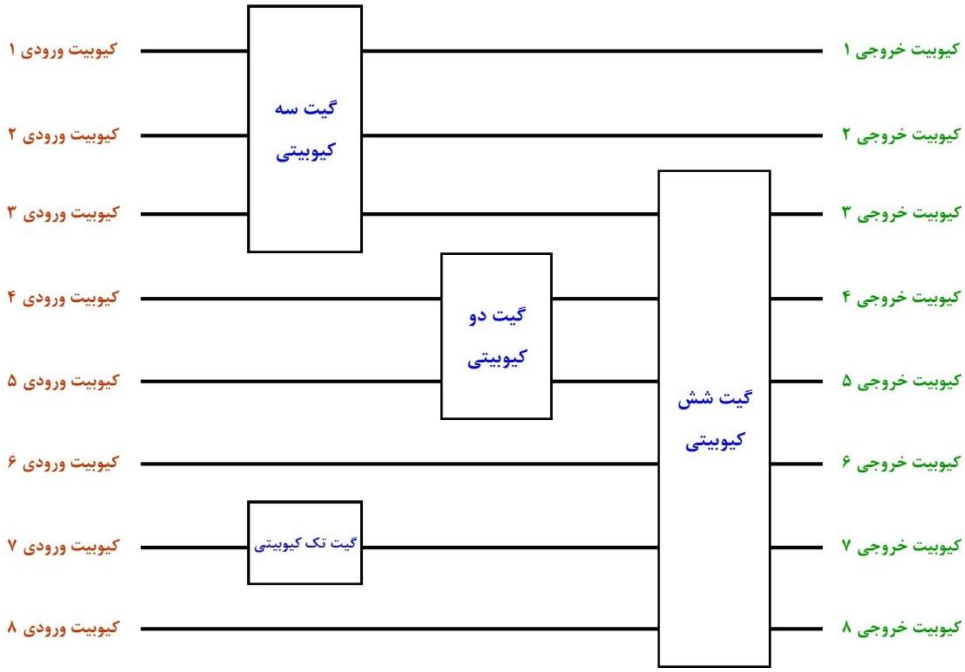


Figure 4:مدار کوانتومی نوعی شامل گیت‌های کوانتومی چند کیوبیتی

مشخصا در این مقاله آموزشی کوتاه نمی‌توان تمامی گیت‌های کوانتومی موجود را معرفی کرد، با این حال در ادامه به معرفی مهمترین گیت‌های یک کیوبیتی و تاثیر آن‌ها بر کیوبیت‌های $|0\rangle$ و $|1\rangle$ می‌پردازیم. در شماره بعدی فصلنامه نیز مهمترین گیت‌های دو و سه کیوبیتی را معرفی کرده و تاثیر آن‌ها بر کیوبیت‌ها را بررسی می‌کنیم.

گیت‌های تک کیوبیتی

ماتریس‌های پاولی، ماتریس‌های 2×2 هستند و امکان توجیه اسپین الکترون‌ها را فراهم می‌کنند. این ماتریس‌ها یکانی، بدون رد(traceless) و هرمیتی هستند. بعلاوه دترمینان همه آن‌ها صفر است .

$$\sigma_x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\qquad\sigma_y=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\qquad\sigma_z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

سه گیت تک کیوبیتی که در ادامه بررسی می‌کنیم، توسط ماتریس‌های پاولی ساخته می‌شوند. پس از آن دو گیت دیگر به نام گیت فاز و گیت هادامارد را نیز مورد بررسی قرار می‌دهیم. گیت‌های تک کیوبیتی که در این مقاله معرفی می‌شوند، در شکل 5 خلاصه شده اند.

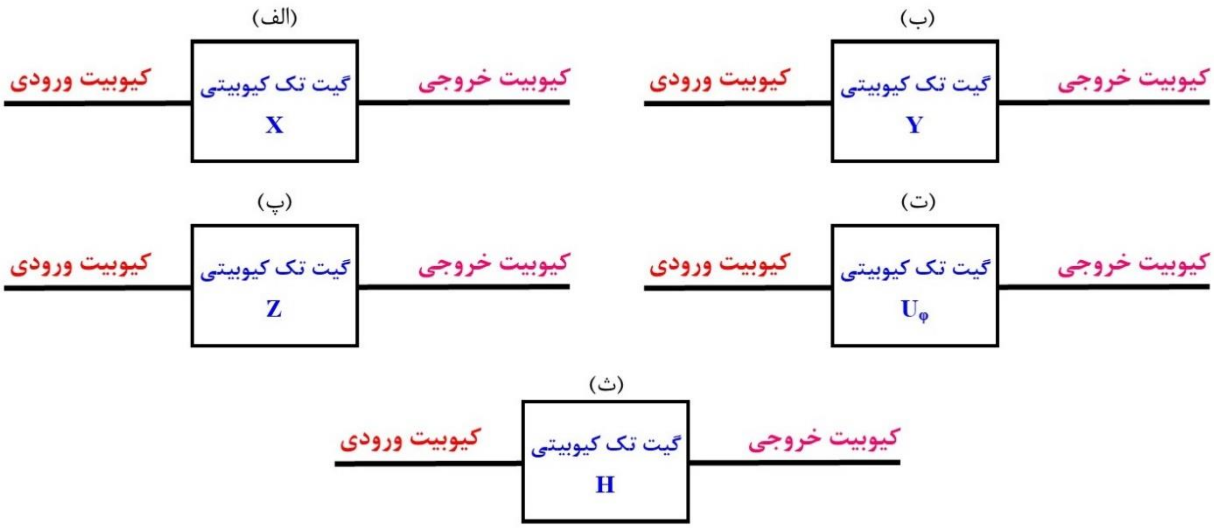


Figure 5: چند نمونه گیت تک کیوبیتی. از (الف) تا (ث) به ترتیب گیت‌های X، Y، Z و فاز و هادامارد را مشاهده می‌کنیم.

گیت X

این گیت معادل ماتریس پاولی σ_x است و به صورت زیر روی کیوبیت‌های $|0\rangle$ و $|1\rangle$ اثر می‌کند .

$$X=\sigma_x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\qquad |0\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\qquad |1\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$X|0\rangle=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=|1\rangle$$

$$X|1\rangle=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=|0\rangle$$

تاثیر این گیت بر روی کیوبیت‌های $|0\rangle$ و $|1\rangle$ مانند تاثیر گیت NOT کلاسیکی بر روی بیت‌های 0 و 1 است. اما در حالت کلی عملگر NOT کوانتومی وجود ندارد. چون گیت‌ها و تاثیر آن‌ها، به پایه‌ای بستگی دارد که کیوبیت در آن آماده سازی شده است و تنها در موارد خاص می‌توان برای یک پایه معین گیت NOT کوانتومی ساخت. بنابراین نمی‌توان در حالت کلی گیتی بسازیم که با اعمال آن روی هر حالت دلخواه، NOT آن حالت را بدست آوریم .

گیت Y

این گیت معادل ماتریس پاولی σ_y است و به صورت زیر روی کیوبیت‌های $|0\rangle$ و $|1\rangle$ اثر می‌کند .

$$Y = \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Y|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} = i|1\rangle$$

$$Y|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \end{pmatrix} = -i|0\rangle$$

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2}) = i \qquad ; \qquad e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos(\frac{\pi}{2}) - i\sin(\frac{\pi}{2}) = -i$$

این گیت کیوبیت $|0\rangle$ را NOT کرده و به اندازه $\frac{\pi}{2}$ روی کره بلاخ می‌چرخاند. به طور مشابه، کیوبیت $|1\rangle$نیز NOT شده و به اندازه $-\frac{\pi}{2}$ دوران می‌یابد، یا به عبارتی دیگر، تحت تاثیر این گیت، نه تنها کیوبیت‌ها NOT می‌شوند، بلکه فاز آن‌ها نیز تغییر می‌یابد. باز هم باید اشاره کنیم که تاثیر گیت‌ها به پایه‌ای که کیوبیت در آن آماده سازی شده بستگی دارد و تمامی بحث‌هایی که در اینجا و در ادامه ذکر می‌شود، به ازای پایه‌های محاسباتی $|0\rangle$ و $|1\rangle$ برقرار هستند.

گیت Z

این گیت معادل ماتریس پاولی σ_z است و به صورت زیر روی کیوبیت‌های $|0\rangle$ و $|1\rangle$ اثر می‌کند .

$$Z = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Z|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle$$

$$Z|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -|1\rangle$$

$$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$$

این گیت کیوبیت $|0\rangle$ را تغییر نمی‌دهد، ولی در صورتی که کیوبیت ورودی $|1\rangle$ باشد، فاز آن را به اندازه 180 درجه تغییر می‌دهد .

گیت U_φ

دیدیم که دو گیت Y و Z می‌توانند فاز کیوبیت‌های ورودی را تغییر دهند. اما این تغییر فازها به ترتیب به اندازه 90 و 180 درجه است. می‌توان گیتی ساخت که این تغییر فاز را به اندازه دلخواه φ انجام دهد. تاثیر گیت فاز بر روی کیوبیت‌های $|0\rangle$ و $|1\rangle$ به صورت زیر است.

$$U_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix} \qquad |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$U_\varphi |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle$$

$$U_\varphi |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{i\varphi} \end{pmatrix} = e^{i\varphi} |1\rangle$$

بنابراین، این گیت کیوبیت $|0\rangle$ را تغییر نمی‌دهد، ولی در صورتی که کیوبیت ورودی $|1\rangle$ باشد، فاز آن را به اندازه دلخواه φ درجه تغییر می‌دهد. به ازای φ خاص، گیت‌های مهم زیر بدست می‌آیند. دو گیت آخر در پروتکل‌هایی که در اطلاعات کوانتومی مهم هستند، بکار می‌روند.

$$for \quad \varphi = \pi \quad \rightarrow \quad U_\varphi = Z$$

$$for \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad U_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

$$for \quad \varphi = \frac{\pi}{8} \quad \rightarrow \quad U_\varphi = T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{8}} \end{pmatrix}$$

گیت هادامارد

یکی از مهمترین گیت‌های تک کیوبیتی گیت هادامارد است. این گیت به صورت زیر تعریف شده و بر روی کیوبیت‌های $|0\rangle$و $|1\rangle$اثر می‌کند .

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|0\rangle + |1\rangle \right]$$

$$H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|0\rangle - |1\rangle \right]$$

این گیت از آن جهت اهمیت دارد که می‌تواند حالت ورودی خالص(pure) را به یک حالت برهمنهی تبدیل کند. در صورتی که حالت ورودی $|0\rangle$ یا $|1\rangle$ باشد، به حالت ورودی خالص می‌گوییم. چون سیستم با احتمال 100

درصد در یکی از این دو وضعیت آماده شده است. اما در صورتی که حالت ورودی یک حالت برهمنهی به صورت $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ باشد، سیستم با احتمال $|\alpha|^2$ در وضعیت $|0\rangle$ و با احتمال $|\beta|^2$ در وضعیت $|1\rangle$ قرار دارد. بنابراین این حالت ورودی، حالتی آمیخته است. چون ترکیبی از حالت $|0\rangle$ و $|1\rangle$ می‌باشد. حال گیت هادامارد نه تنها می‌تواند یک حالت ورودی خالص را به یک حالت برهمنهی تبدیل کند، بلکه می‌تواند حالت برهمنهی را جوری بسازد که وضعیت سیستم با احتمال 50/50 در یکی از دو وضعیت $|0\rangle$ یا $|1\rangle$ باشد.

در این مقاله به طور خلاصه به نحوه پردازش اطلاعات در سیستم‌های کلاسیکی و کوانتومی پرداختیم و دیدیم که مهمترین سوال ما در سیستم‌های کوانتومی، حالت سیستم پس از تحول زمانی است. گفتیم که به دو روش شبیه سازی آنالوگ و دیجیتال می‌توان تحول زمانی یک سیستم کوانتومی را شبیه سازی کرد. در انتها نیز به مهمترین گیت‌های تک کیوبیتی که در شبیه سازی دیجیتال به کار می‌روند، اشاره کردیم.